PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

9 MARCA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Cena nart po obniżce o 23% jest mniejsza o 108 zł od ceny nart po obniżce o 17%. Ile kosztowałby te narty po obniżce ceny o 20%?

A) 1386 zł B) 1440 zł C) 1494 zł D) 1530 zł

ROZWIĄZANIE

Jeżeli x oznacza cenę nart, to wiemy, że

$$77\%x = 0,83\%x - 108$$
$$108 = 0,83x - 0,77x = 0,06x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{108}{0,06} = 1800.$$

Zatem cena po obniżce o 20% będzie równa

$$80\%x = 0,8x = 1440.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $\sqrt[5]{0,25} \cdot \sqrt[5]{\frac{6,4}{12,15}}$ jest równa

A) $\frac{2}{3}$ B) 1,5 C) $\frac{4}{3}$ D) $\sqrt[5]{0,13}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt[5]{0,25} \cdot \sqrt[5]{\frac{6,4}{12,15}} = \sqrt[5]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{640}{1215}} = \sqrt[5]{\frac{1}{4} \cdot \frac{128}{243}} = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 3 (1 PKT)

Wskaż nierówność, którą spełnia liczba $\sqrt[3]{25}$.

A) $|x+1| > 5$ B) $|x-1| < \frac{1}{3}$ C) $|1-x| < 2$ D) $\left|x-\frac{1}{3}\right| \leqslant 1$

ROZWIĄZANIE

Sprawdzamy po kolei pamiętając o tym, że

$$2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} = 3$$

Jedyna nierówność spełniona przez $\sqrt[3]{25}$ to

$$|1-x| = |1-\sqrt[3]{25}| = \sqrt[3]{25} - 1 < 3 - 1 = 2.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 4 (1 PKT)

Liczba $\log^2 40 - \log^2 4$ jest równa

A) $1+4\log 2$ B) $1+2\log 8$ C) $2\log 4$ D) $\log^2 160$

ROZWIĄZANIE

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

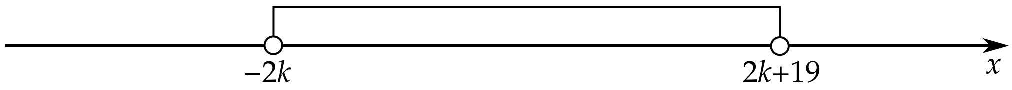
liczymy

$$\begin{aligned} \log^2 40 - \log^2 4 &= (\log 40 - \log 4)(\log 40 + \log 4) = \\ &= \log\frac{40}{4} \cdot \log(40\cdot 4) = \log 10 \cdot \log 160 = 1 \cdot \log(10\cdot 16) = \\ &= \log 10 + \log 2^4 = 1 + 4\log 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 5 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiony jest przedział $(-2k, 2k+19)$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Suma wszystkich liczb całkowitych nieparzystych należących do tego przedziału jest równa 171.



Stąd wynika, że

A) $k = 10$ B) $k = 19$ C) $k = 5$ D) $k = 6$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że suma liczb całkowitych nieparzystych w przedziale $(-2k, 2k)$ jest równa 0, więc suma liczb całkowitych nieparzystych w przedziale $(-2k, 2k+19)$ jest równa

$$(2k+1) + (2k+3) + \ldots + (2k+17).$$

Jest to suma 9 kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, więc mamy równanie

$$\begin{aligned} 171 &= \frac{(2k+1)+(2k+17)}{2} \cdot 9 = \frac{4k+18}{2} \cdot 9 = (2k+9) \cdot 9 \quad / : 9 \\ 19 &= 2k+9 \quad \Rightarrow \quad 2k = 10 \quad \Rightarrow \quad k = 5. \end{aligned}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 6 (1 PKT)

Liczby $x_1 < x_2$ są rozwiązaniami równania $3(x+5)(x-2) = 0$. Różnica $x_1^2 - x_2^2$ jest równa

A) 21 B) 29 C) -29 D) -3

ROZWIĄZANIE

Rozwiązaniami danego równania są liczby $x_1 = -5$ i $x_2 = 2$. Zatem

$$x_1^2 - x_2^2 = (-5)^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 7 (1 PKT)

Średnia arytmetyczna zestawu danych: $11, 1, 5, 9, x, 3, 7, 12$ o medianie 6,5 jest równa

A) 8 B) 7,5 C) 7 D) 6,75

ROZWIĄZANIE

Wypiszmy dane liczby w porządku rosnącym

$$1,3,5,7,9,11,12.$$

Mediana tych 7 liczb jest równa 7, a wiemy, że po dołożeniu liczby x mediana maleje, więc $x < 7$. Z drugiej strony, gdyby $x \leqslant 5$, mediana całego zestawu danych byłaby równa

$$\frac{5+7}{2} = 6.$$

W takim razie $5 < x < 7$ i mamy równanie

$$\frac{7+x}{2} = 6,5 \quad \Longleftrightarrow \quad 7+x = 13 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 6.$$

Liczymy jeszcze średnią

$$\frac{1+3+5+6+7+9+11+12}{8} = \frac{54}{8} = 6,75.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 8 (1 PKT)

Liczba $\frac{27^{30}-3\cdot 9^{30}}{3^{30}\cdot 9^{10}}$ jest równa

A) -3 B) $3^{20}-3$ C) 3^{29} D) $3^{40}-3^{11}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{27^{30}-3\cdot 9^{30}}{3^{30}\cdot 9^{10}} = \frac{\left(3^3\right)^{30} - 3\cdot\left(3^2\right)^{30}}{3^{30}\cdot\left(3^2\right)^{10}} = \frac{3^{90}}{3^{50}} - \frac{3\cdot 3^{60}}{3^{50}} = 3^{40} - 3^{11}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 9 (1 PKT)

Wyrażenie $-\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^{-15}\cdot(-2c+2d)^{-14}$ jest równe wyrażeniu

A) $-\frac{1}{2}(b-a)^{-15}(c-d)^{-14}$ B) $2(b-a)^{-15}(c-d)^{-14}$

C) $\frac{1}{2}(b-a)^{-15}(c-d)^{-14}$ D) $-2(b-a)^{-15}(c-d)^{-14}$

ROZWIĄZANIE

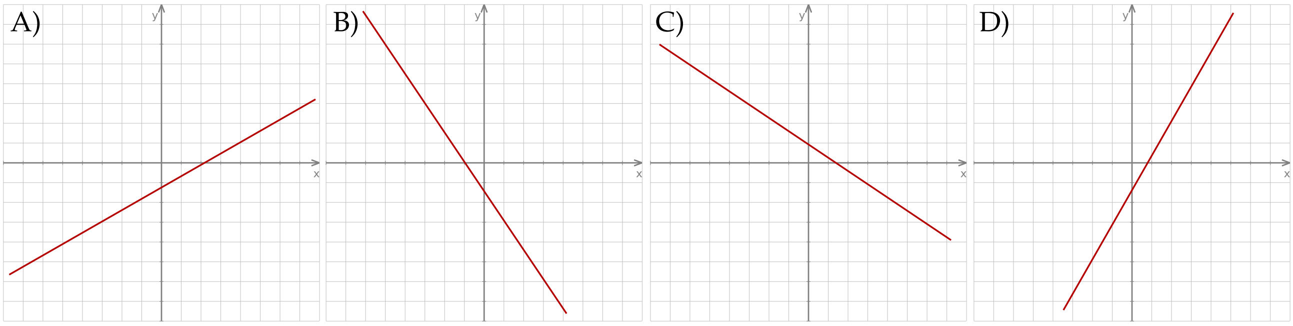
Przekształcamy dane wyrażenie

$$-\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^{-15}\cdot(-2c+2d)^{-14} = -\frac{(a-b)^{-15}}{2^{-15}}\cdot(-2)^{-14}\cdot(c-d)^{-14} =$$
$$= (b-a)^{-15}\cdot 2^{-14-(-15)}\cdot(c-d)^{-14} = 2(b-a)^{-15}(c-d)^{-14}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 10 (1 PKT)

Na którym rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ takiej, że $ab - |ab| = 0$?



ROZWIĄZANIE

Jeżeli $ab - |ab| = 0$ to $|ab| = ab$, czyli $ab \geqslant 0$. To oznacza, że liczby a i b mają takie same znaki. Jeżeli przyjrzymy się podanym wykresom, to widać, że warunek ten spełnia funkcja liniowa z wykresu B – jest malejąca, czyli $a < 0$ oraz przecina oś Oy poniżej osi Ox, czyli $b < 0$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

A) $\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$ B) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ C) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ D) $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Liczymy współrzędne wierzchołka

$$(x_w, y_w) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-6}{-4}, \frac{-12}{-8}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

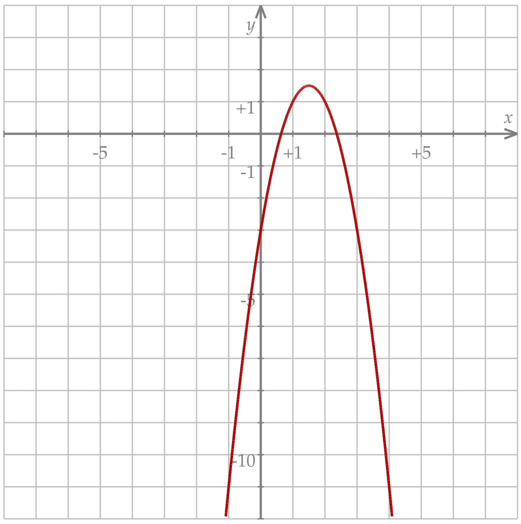
Sposób II

Zauważmy, że

$$-2x^2 + 6x - 3 = -2\left(x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right) = -2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}.$$

Wykresem jest więc parabola o wierzchołku $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

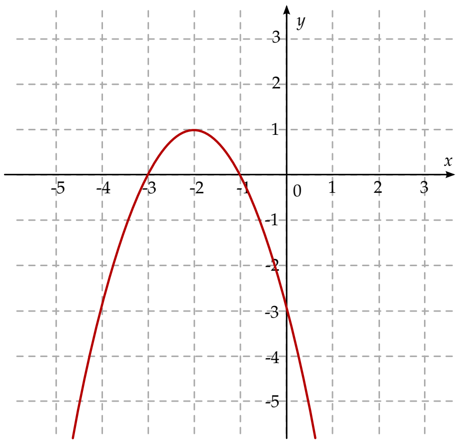


Odpowiedź: **B**

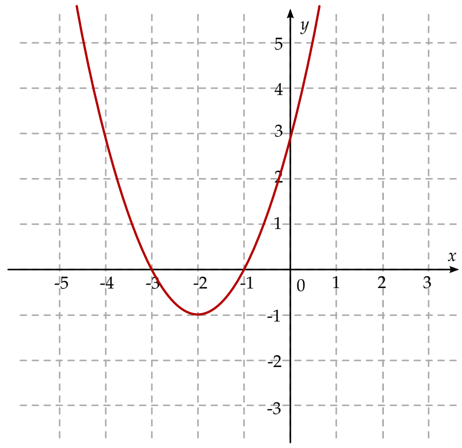
ZADANIE 12 (1 PKT)

Na jednym z rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -(1-x)(3-x)$. Wskaż ten rysunek.

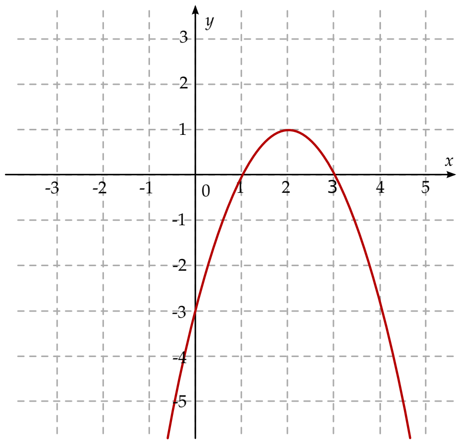
A)



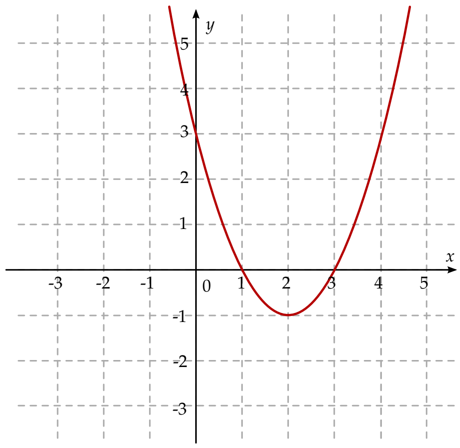
B)



C)



D)



Rozwiązanie

Wykresem funkcji

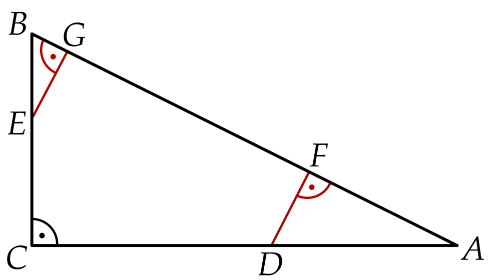
$$f(x) = -(1-x)(3-x) = -(x-1)(x-3)$$

jest parabola o ramionach skierowanych w dół (bo po wymnożeniu nawiasów współczynnik przy x^2 jest ujemny) i miejscach zerowych $x = 1$, $x = 3$. Te własności ma tylko funkcja z obrazka C.

Odpowiedź: **C**

Zadanie 13 (1 pkt)

Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC wybrano punkty D i E tak, że $|BE| = \frac{1}{3}|BC|$ i $|AD| = \frac{1}{3}|AC|$. Punkty F i G leżą na przeciwprostokątnej AB tak, że odcinki DF i EG są do niej prostopadłe (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 36.

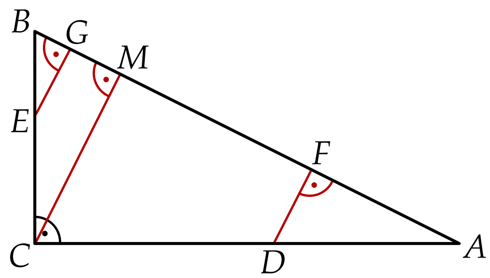


Zatem suma pól trójkątów BGE i AFD jest równa

A) 4 B) 12 C) 18 D) 9

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy wysokość CM trójkąta ABC.



Zauważmy teraz, że trójkąt AFD jest podobny do trójkąta AMC w skali $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$. Podobnie trójkąt BGE jest podobny do trójkąta BMC w skali $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$. Mamy stąd

$$P_{AFD} + P_{BGE} = \frac{1}{9}(P_{AMC} + P_{BMC}) = \frac{1}{9}P_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot 36 = 4.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Rozwiązaniem równania $\frac{5x-4}{3x+2} = \frac{3}{4}$ jest

A) $x = -9$ B) $x = \frac{1}{7}$ C) $x = 2$ D) $x = 22$

ROZWIĄZANIE

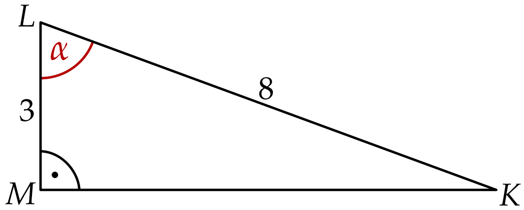
Liczymy

$$\begin{aligned}
&\frac{5x-4}{3x+2} = \frac{3}{4} \quad / \cdot 4(3x+2)\\
&4(5x-4) = 3(3x+2)\\
&20x - 16 = 9x + 6\\
&11x = 22 \quad / : 2\\
&x = 2.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Przyprostokątna LM trójkąta prostokątnego KLM ma długość 3, a przeciwprostokątna KL ma długość 8 (zobacz rysunek).



Wtedy miara α kąta ostrego MLK tego trójkąta spełnia warunek
A) $66^\circ < \alpha < 69^\circ$ B) $63^\circ < \alpha < 66^\circ$ C) $60^\circ < \alpha < 63^\circ$ D) $69^\circ < \alpha < 72^\circ$

ROZWIĄZANIE

Z rysunku odczytujemy

$$\cos\measuredangle\alpha = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Odczytujemy teraz z tablic, że $\measuredangle\alpha \approx 68^\circ$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = \sqrt{2}n - \frac{n-1+\sqrt{3}n}{\sqrt{3}+1}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Różnica r tego ciągu jest równa
A) $r = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ B) $r = \sqrt{2}$ C) $r = 2\sqrt{2}$ D) $r = \sqrt{2}-1$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Ponieważ

$$a_1 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$
$$a_2 = 2\sqrt{2} - \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

to

$$r = a_2 - a_1 = 2\sqrt{2} - \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right) =$$
$$= \sqrt{2} - \frac{1+2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{2}-1.$$

Sposób II

Zauważmy, że

$$a_n = \sqrt{2}n - \frac{n-1+\sqrt{3}n}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{2}n - \frac{-1+(\sqrt{3}+1)n}{\sqrt{3}+1} =$$
$$= \sqrt{2}n - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}+1} + n\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + (\sqrt{2}-1)n.$$

To oznacza, że jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $r = \sqrt{2}-1$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Dany jest ciąg geometryczny $(2x, 6x^2, 18x^3, 216)$ o wyrazach dodatnich. Wtedy

A) $x = \sqrt{2}$ B) $x = 2$ C) $x = \sqrt[4]{2}$ D) $x = \sqrt[4]{6}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

W ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (z wyjątkiem pierwszego i ostatniego) jest iloczynem wyrazów sąsiednich. Mamy więc

$$\left(18x^3\right)^2 = 6x^2 \cdot 216 \quad / : 18^2$$
$$x^6 = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 4$$

Ponieważ wyrazy ciągu są dodatnie mamy stąd $x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Sposób II

Ponieważ $a_1 = 2x$ i $a_2 = 6x^2 = 3x \cdot 2x$ iloraz ciągu jest równy $q = 3x$. Mamy stąd

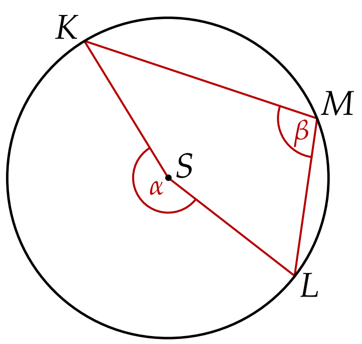
$$216 = a_4 = a_3q = 18x^3 \cdot 3x = 54x^4,$$

czyli $x^4 = 4$. Ponieważ wyrazy ciągu są dodatnie mamy stąd $x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Dany jest okrąg o środku S. Punkty K, L i M leżą na tym okręgu. Na łuku KL tego okręgu są oparte kąty KSL i KML (zobacz rysunek), których miary α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 312^\circ$. Wynika stąd, że



A) $\beta = 156^\circ$ B) $\beta = 104^\circ$ C) $\beta = 208^\circ$ D) $\beta = 234^\circ$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, mamy

$$312^\circ = \alpha + \beta = 2\beta + \beta = 3\beta$$

Stąd

$$\beta = \frac{1}{3} \cdot 312^\circ = 104^\circ.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 19 (1 PKT)

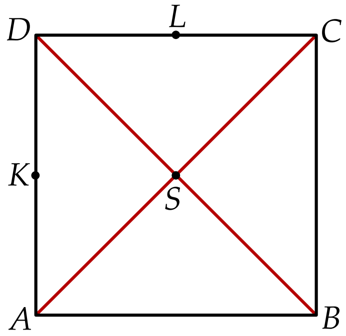
Punkt $A = (-8, 13)$ jest wierzchołkiem kwadratu $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $S = (-4, 19)$. Punkty K i $L = (-5, 24)$ są odpowiednio środkami odcinków AD i CD. Punkt K ma współrzędne

A) $(-10, 23)$ B) $(-10, 16)$ C) $(-9, 18)$ D) $(0, 25)$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekątne kwadratu dzielą się na połowy, więc ich punkt przecięcia S jest środkiem odcinka AC.



Mamy zatem

$$S = \frac{A + C}{2} \quad \Rightarrow \quad A + C = 2S \quad \Rightarrow \quad C = 2S - A = (-8, 38) - (-8, 13) = (0, 25).$$

Punkt L jest środkiem odcinka CD, więc

$$L = \frac{C + D}{2} \quad \Rightarrow \quad C + D = 2L \quad \Rightarrow \quad D = 2L - C = (-10, 48) - (0, 25) = (-10, 23).$$

Stąd

$$K = \frac{A + D}{2} = \frac{(-8, 13) + (-10, 23)}{2} = \frac{(-18, 36)}{2} = (-9, 18).$$

Sposób II

Zauważmy, że $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{KL}$, więc

$$S - A = L - K$$
$$K = L + A - S = (-5,24) + (-8,13) - (-4,19) = (-9,18).$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Kąt α jest rozwarty i $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$. Wobec tego

A) $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ B) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ C) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$ D) $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

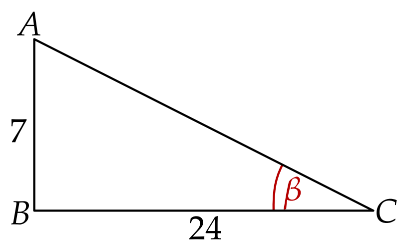
Z podanego tangensa obliczymy sinus.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= -\frac{7}{24} \quad /()^2\\
\operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{49}{576}\\
\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} &= \frac{49}{576} \quad / \cdot 576\cos^2\alpha\\
576\sin^2\alpha &= 49\cos^2\alpha\\
576\sin^2\alpha &= 49 - 49\sin^2\alpha\\
625\sin^2\alpha &= 49 \quad / : 625\\
\sin^2\alpha &= \frac{49}{625} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{7}{25}.
\end{aligned}$$

(Wybraliśmy dodatnią wartość sinusa, bo α jest kątem rozwartym.)

Sposób II

Narysujmy trójkąt prostokątny, w którym kąt ostry $\beta = 180^\circ - \alpha$ spełnia $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$.



Łatwo teraz obliczyć sinus i cosinus. Najpierw obliczmy z twierdzenia Pitagorasa długość przeciwprostokątnej.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25.$$

Zatem

$$\sin\beta = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{25}.$$

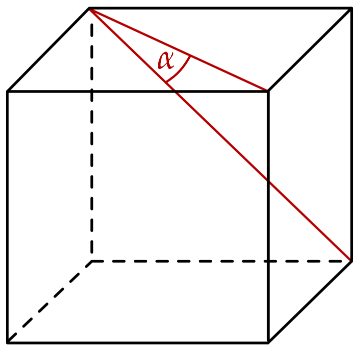
Interesujący nas kąt jest jednak kątem rozwartym, więc

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta = \frac{7}{25}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 21 (1 PKT)

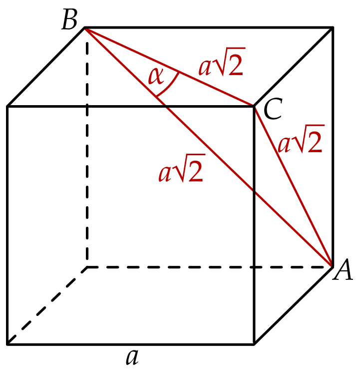
Jeżeli α oznacza miarę kąta między przekątnymi ścian sześcianu (zobacz rysunek), to



A) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy długość krawędzi sześcianu przez a.



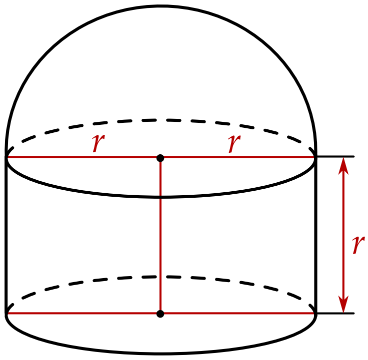
Długość przekątnej każdej ze ścian sześcianu jest równa $a\sqrt{2}$, więc trójkąt ABC jest równoboczny. Zatem

$$\sin\alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 22 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono bryłę zbudowaną z walca i półkuli. Wysokość walca jest równa r i jest taka sama jak promień półkuli oraz taka sama jak promień podstawy walca.



Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe

A) $6\pi r^2$ B) $5\pi r^2$ C) $4\pi r^2$ D) $\frac{11}{3}\pi r^2$

ROZWIĄZANIE

Pole powierzchni połówki półkuli jest równe

$$\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2 = 2\pi r^2$$

Pole powierzchni bocznej walca jest równe

$$2\pi r\cdot r = 2\pi r^2.$$

Pole podstawy walca jest równe

$$\pi r^2.$$

W sumie pole powierzchni całkowitej jest więc równe

$$2\pi r^2 + 2\pi r^2 + \pi r^2 = 5\pi r^2.$$

Odpowiedź: **B**

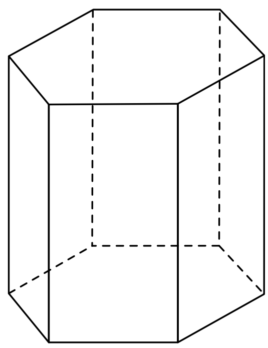
ZADANIE 23 (1 PKT)

Łukasz dodał do siebie liczby krawędzi, wierzchołków oraz ścian pewnego graniastosłupa. Którą z liczb mógł otrzymać w wyniku?

A) 2018 B) 2019 C) 2020 D) 2021

ROZWIĄZANIE

Jeżeli w podstawie graniastosłupa jest n–kąt to graniastosłup ma $3n$ krawędzi, $2n$ wierzchołków i $n+2$ ścian.



Dodając te trzy liczby do siebie otrzymujemy

$$3n + 2n + (n+2) = 6n + 2,$$

czyli liczbę dającą resztę 2 przy dzieleniu przez 6. Wśród podanych odpowiedzi tylko

$$2018 = 336 \cdot 6 + 2$$

ma tę własność.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 24 (1 PKT)

Liczba wszystkich dodatnich liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których zapisie nie występują cyfry 1 i 2, jest równa

A) $7\cdot 8\cdot 8\cdot 5$ B) $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ C) $7\cdot 8\cdot 8\cdot 4$ D) $8\cdot 7\cdot 7\cdot 4$

ROZWIĄZANIE

Pierwszą cyfrę utworzonej liczby możemy wybrać na 7 sposobów (nie może być równa 0, 1, 2). Każdą z kolejnych dwóch możemy wybrać na 8 sposobów, a cyfrę jedności możemy wybrać na 4 sposoby (musi być nieparzysta i różna od 1). Jest więc

$$7\cdot 8\cdot 8\cdot 4$$

takich liczb.

Odpowiedź: **C**

Zadanie 25 (1 pkt)

Pewnego dnia w klasie liczącej 16 dziewcząt i 12 chłopców nieobecnych było dwóch chłopców i trzy dziewczynki. Nauczyciel wybrał do odpowiedzi jednego ucznia. Prawdopodobieństwo, że będzie to dziewczynka jest równe:

A) $\frac{13}{23}$ B) $\frac{13}{28}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{14}$

Rozwiązanie

Tego dnia w klasie były

$$|\Omega| = 16 + 12 - 2 - 3 = 23$$

osoby i 13 z nich to dziewczynki. Zatem prawdopodobieństwo wybrania dziewczynki jest równe

$$\frac{13}{23}.$$

Odpowiedź: **A**

Zadania otwarte

Zadanie 26 (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $6x^4 - 11x^3 + 3x^2 > 0$.

Rozwiązanie

Jeżeli $x = 0$, to nierówność jest sprzeczna – zapamiętajmy to i załóżmy dalej, że $x \neq 0$. Wtedy $x^2 > 0$ i możemy podzielić daną nierówność stronami przez x^2. Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
&6x^2 - 11x + 3 > 0 \\
&\Delta = 11^2 - 4 \cdot 18 = 121 - 72 = 49 = 7^2 \\
&x = \frac{11-7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{11+7}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\
&x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

Na koniec musimy jeszcze pamiętać o usunięciu $x = 0$ ze zbioru rozwiązań.

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

Odpowiedź: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Zadanie 27 (2 pkt)

Wykaż, że jeżeli długości boków a, b, c trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi, to liczba abc jest parzysta.

ROZWIĄZANIE

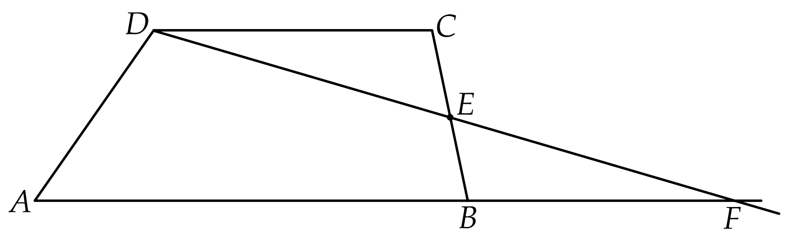
Niech c będzie przeciwprostokątną danego trójkąta oraz załóżmy, że wszystkie trzy podane długości boków są liczbami nieparzystymi, tzn. $a = 2n+1$, $b = 2m+1$, $c = 2k+1$ dla pewnych liczb całkowitych k, n, m. Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ (2k+1)^2 &= (2n+1)^2 + (2m+1)^2 \\ 4k^2 + 4k + 1 &= 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 \\ 4(k^2 + k - n^2 - n - m^2 - m) &= 1. \end{aligned}$$

To jednak nie jest możliwe, bo lewa strona dzieli się przez 4, a prawa nie. W takim razie nie mogą wszystkie trzy liczby a, b, c być liczbami nieparzystymi, więc jedna z nich jest parzysta. To oznacza, że iloczyn abc jest liczbą parzystą.

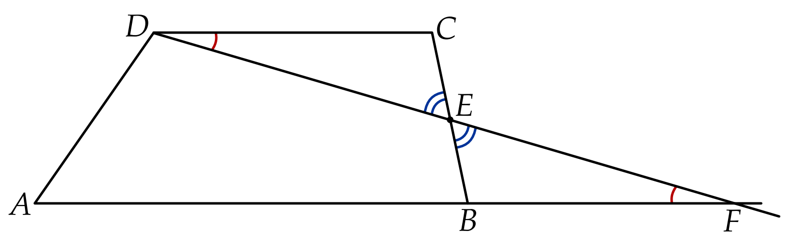
ZADANIE 28 (2 PKT)

W trapezie $ABCD$ punkt E jest środkiem ramienia BC. Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą ramię BC w punkcie E. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że $|BF| = |CD|$.



ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąty CDE i BFE mają równe kąty, więc są podobne.



Ponadto $CE = BE$, więc trójkąty te są przystające. W takim razie

$$CD = BF.$$

ZADANIE 29 (2 PKT)

Liczby niezerowe a, b, c, d spełniają warunek $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{13}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{6a+15c}{8b+20d}$.

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{13} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{13}\cdot b$$
$$\frac{c}{d} = \frac{2}{13} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{13}\cdot d.$$

Zatem

$$\frac{6a+15c}{8b+20d} = \frac{6\cdot\frac{2}{13}\cdot b + 15\cdot\frac{2}{13}\cdot d}{8b+20d} = \frac{2}{13}\cdot\frac{6b+15d}{8b+20d} = \frac{2}{13}\cdot\frac{3(2b+5d)}{4(2b+5d)} = \frac{3}{26}.$$

Odpowiedź: $\frac{3}{26}$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = a^x$ (gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$), należy punkt $P = (-3, 8)$. Oblicz a i zapisz zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x) = f(x) - 3$.

ROZWIĄZANIE

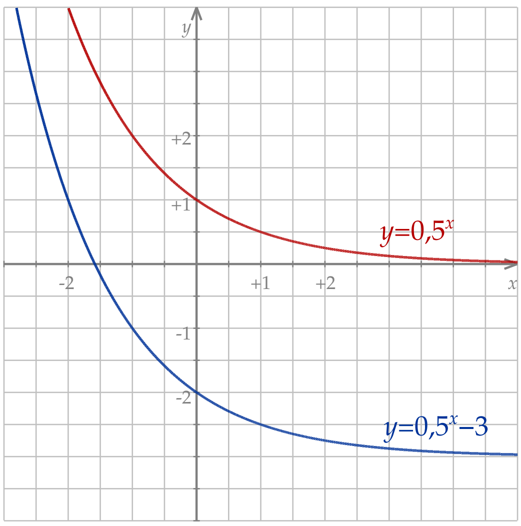
Wiemy, że

$$2^3 = 8 = f(-3) = a^{-3} = (a^{-1})^3,$$

więc $a = \frac{1}{2}$ i

$$g(x) = f(x) - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3.$$

Wykres funkcji $y = g(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez przesunięcie o 3 jednostki w dół.



Zbiorem wartości funkcji $g(x)$ jest więc przedział $(-3, +\infty)$.

Odpowiedź: $a = \frac{1}{2}$, **zbiór wartości:** $(-3, +\infty)$.

ZADANIE 31 (2 PKT)

Ze zbioru $A = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ losujemy liczbę a, natomiast ze zbioru $B = \{-1,0,1,2\}$ losujemy liczbę b. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest malejąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

ROZWIĄZANIE

Parę liczb (a,b) taką, że $a \in A$ i $b \in B$ możemy wybrać na

$$6 \cdot 4 = 24$$

sposoby. Obliczmy teraz dla ilu par otrzymana funkcja $f(x) = ax + b$ jest malejąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Pierwszy warunek oznacza, że $a < 0$. Aby rozszyfrować drugi zauważmy, że

$$ax + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Jeżeli więc $a < 0$, to miejsce zerowe funkcji f jest dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $b > 0$. W sumie jest więc 6 takich par:

$$(-3,1),(-3,2),(-2,1),(-2,2),(-1,1),(-1,2)$$

i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych $n \geqslant 1$, wyraz piąty jest liczbą trzy razy mniejszą od wyrazu szóstego, a suma dwunastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $S_{12} = \frac{12}{5}$. Oblicz wyraz pierwszy oraz różnicę tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{aligned}
&a_5 = \frac{1}{3}a_6 \quad / \cdot 3\\
&3(a_1 + 4r) = a_1 + 5r\\
&2a_1 + 7r = 0.
\end{aligned}$$

Korzystamy teraz ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\begin{aligned}
&\frac{12}{5} = S_{12} = \frac{2a_1 + 11r}{2} \cdot 12 = 6(2a_1 + 11r) \quad / \cdot \frac{5}{6}\\
&2 = 5(2a_1 + 11r).
\end{aligned}$$

Podstawiamy teraz w tej równości $2a_1 = -7r$.

$$2 = 5(-7r + 11r) = 5 \cdot 4r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{10}$$

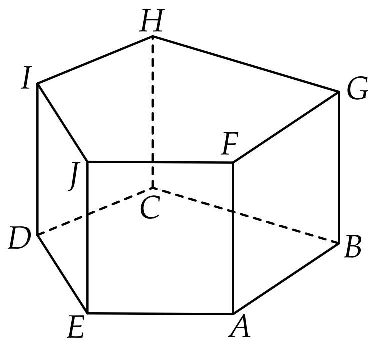
Stąd

$$a_1 = -\frac{7}{2}r = -\frac{7}{20}.$$

Odpowiedź: $r = \frac{1}{10}$; $a_1 = -\frac{7}{20}$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Dany jest graniastosłup prosty o podstawie pięciokątnej $ABCDE$ (zobacz rysunek). Każda ze ścian bocznych tego graniastosłupa jest kwadratem o polu dwa razy mniejszym niż pole pięciokąta $ABCDE$. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe 153. Oblicz jego objętość.



ROZWIĄZANIE

Korzystamy najpierw z podanej informacji o polu powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$153 = P_c = 2P_p + P_b = 2P_p + \frac{5}{2}P_p = \frac{9}{2}P_p \quad \Rightarrow \quad P_p = 153 \cdot \frac{2}{9} = 34.$$

Jeżeli teraz oznaczymy przez a długość krawędzi graniastosłupa (którejkolwiek, bo wszystkie mają tę samą długość), to

$$34 = P_p = 2 \cdot P_{ABGF} = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{17}$$

i objętość graniastosłupa jest równa

$$V = P_p \cdot a = 34 \cdot \sqrt{17}.$$

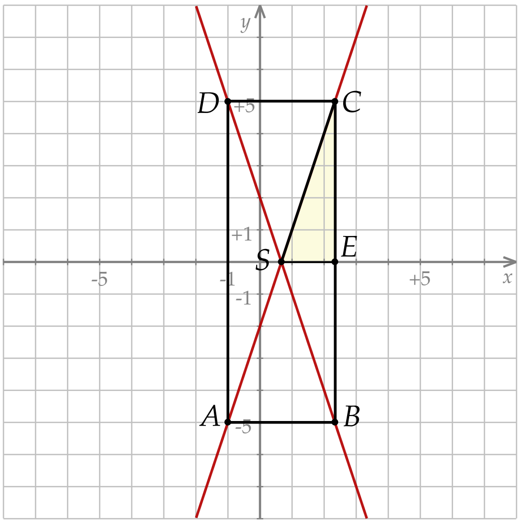
Odpowiedź: $V = 34\sqrt{17}$

ZADANIE 34 (5 PKT)

Przekątne prostokąta $ABCD$ o obwodzie $26\frac{2}{3}$ są zawarte w prostych o równaniach $y=(p+2)x-q$ i $y=(q-5)x+2p$. Ponadto prosta $y=0$ jest osią symetrii tego prostokąta. Oblicz pole tego prostokąta.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Zauważmy najpierw, że podana oś symetrii prostokąta nie zawiera jego przekątnej – rzeczywiście, w takiej sytuacji $ABCD$ jest kwadratem i druga z przekątnych byłaby pionowa, a żadna z podanych prostych nie jest pionowa. W takim razie podana oś symetrii przechodzi przez środki przeciwległych boków prostokąta i zamienia jego przekątne ze sobą. Obrazem prostej $y=(p+2)x-q$ w symetrii względem osi Ox jest prosta $y=-(p+2)x+q$ i musi to być ta sama prosta, co $y=(q-5)x+2p$. Mamy stąd układ równań

$$\begin{cases} -p-2=q-5 \\ q=2p. \end{cases}$$

Podstawiamy z drugiego równania do pierwszego i mamy

$$-p-2=2p-5 \quad \Rightarrow \quad 3p=3 \quad \Rightarrow \quad p=1.$$

Stąd $q=2p=2$ i przekątne prostokąta mają równania

$$y=3x-2 \quad \text{i} \quad y=-3x+2.$$

Wyznaczmy punkt wspólny tych prostych, czyli środek S prostokąta.

$$\begin{cases} y=3x-2 \\ y=-3x+2. \end{cases}$$

Dodajemy równania układu stronami i otrzymujemy $y=0$. Stąd $x=\frac{y+2}{3}=\frac{2}{3}$ i $S=\left(\frac{2}{3},0\right)$.

Używając oznaczeń z powyższego rysunku, niech $C = (x, 3x-2)$ będzie punktem prostej $y = 3x - 2$ i $E = (x, 0)$ niech będzie środkiem odcinka BC. Mamy wtedy

$$CE = 3x - 2$$
$$SE = x - \frac{2}{3}.$$

Z drugiej strony wiemy, że

$$CE + SE = \frac{1}{2}(BC + AB) = \frac{1}{4} \cdot 26\frac{2}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{3} = \frac{20}{3}.$$

To prowadzi do równania

$$\frac{20}{3} = CE + SE = (3x-2) + \left(x - \frac{2}{3}\right)$$
$$\frac{28}{3} = 4x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{3}.$$

Przy oznaczeniach z naszego rysunku mamy więc

$$C = (x, 3x-2) = \left(\frac{7}{3}, 5\right)$$

i

$$P_{ABCD} = AB \cdot BC = 2SE \cdot 2CE = 4\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (3x-2) =$$
$$= 4 \cdot \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: $\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$